Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Томский государственный архитектурно-строительный университет»

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методические указания
для студентов заочной формы обучения

Составитель: О.А. Сергеева

Томск – 2014

Теория вероятностей: методические указания / сост. О.А. Сергеева. Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун.-та, 2014. – 41 с.

Рецензент к. ф.-м. н. Г.Д. Садритдинова

Редактор к. ф.-м. н. Д.Н. Черепанов

Методические указания к самостоятельной работе по дисциплине Б2.Б.1 – «Математика» при изучении темы «Теория вероятностей» студентами заочной формы обучения всех специальностей и всех направлений и профилей подготовки специалистов и бакалавров.

Печатаются по решению методического семинара кафедры высшей математики № 4 от 07 февраля 2014 г.

$$\frac{\text{с } 01.09.14}{\text{до } 01.09.19}$$

Подписано в печать 10.04.14 г.

Формат 60×84/16. бумага офсет. Гарнитура Таймс. Печать офсет.

Уч. изд. л. 2,05. Тираж 30 экз. Заказ №

Изд-во ТГАСУ, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2.
Отпечатано с оригинал-макета в ООП ТГАСУ.
634003, г. Томск, ул. Партизанская, 15.

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемые методические указания предназначены для самостоятельной работы студентов заочного факультета в процессе выполнения контрольной работы при изучении темы «Теория вероятностей». Математическое содержание данного раздела направлено на формирование у студентов общекультурных (ОК) и профессиональных компетенций (ПК):

(ОК-1): владение культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения.

(ОК-6): стремление к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства.

(ПК-1): использование основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применения методов математического анализа и моделирования теоретического и экспериментального исследования.

(ПК-2): способность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь для их решения соответствующий физико-математический аппарат.

1. Элементы комбинаторики

Комбинаторика - это раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов в соответствии с заданными правилами. Основы комбинаторики очень важны для оценки вероятностей случайных событий, т.к. именно они позволяют подсчитать принципиально возможное количество различных вариантов развития событий.

Рождение комбинаторики как раздела математики связано с трудами Б. Паскаля и П. Ферма по теории азартных игр. Большой вклад в развитие комбинаторных методов внесли Г.В. Лейбниц, Я. Бернулли и Л. Эйлер.

Для формулировки и решения комбинаторных задач используют различные модели **комбинаторных соединений**. Примерами основных комбинаторных соединений являются: **размещения**, **перестановки, сочетания:**

- **Размещением** из n элементов по m называется *упорядоченный* набор из m различных элементов некоторого n-элементного множества, а их число равно:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1).$$

В размещениях важен не только *состав* входящих элементов, но и *порядок* их следования.

- **Перестановкой** из n элементов называется всякий *упорядоченный* набор из этих элементов. Перестановка также является размещением из n элементов по n, а их число будет равно: $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

Символ $n!$ называется **факториалом** и обозначает произведение всех целых чисел от 1 до n. По определению считают, что $0!=1, 1!=1$.

- **Сочетанием** из n по m называется набор m элементов, выбранных из данных n элементов. Наборы, отличающиеся только порядком следования элементов (но не составом), считаются одинаковыми, этим сочетания отличаются от размещений, а их число равно: $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$.

В сочетаниях важно лишь *наличие* входящих элементов и *не важен порядок* их следования.

Ясно, что сочетаний всегда меньше, чем размещений (т.к. при размещениях порядок важен, а для сочетаний нет), причём именно в $m!$ раз, то есть, верна формула связи: $A_n^m = C_n^m \cdot P_m$.

Правила сложения и умножения в комбинаторике называются **основными правилами комбинаторики**.

Правило умножения. Если некоторый объект A можно выбрать m способами, и после каждого такого выбора другой объект B можно выбрать (независимо от выбора объекта A) n способами, то пары объектов A и B можно выбрать $m \cdot n$ способами.

Правило сложения. Если некоторый объект A можно выбрать m способами, а объект B - другими n способами, то выбор объекта A или B можно выполнить $m+n$ способами.

Другими словами:

- Если в условии задачи звучит союз И, то выбираем правило умножения.

- Если в условии задачи присутствует союз ИЛИ, то пользуемся правилом сложения.

2. Случайные события. Действия над событиями.

Случайным называется событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого эксперимента (испытания, опыта, наблюдения). Таким образом, событие рассматривается как результат (исход) некоторого эксперимента.

Событие называется **достоверным**, если оно обязательно наступит в результате рассматриваемого эксперимента; достоверное событие обозначается греческой буквой Ω.

Событие называется **невозможным**, если оно заведомо не произойдёт в результате проведения эксперимента; невозможное событие обозначается символом Ø.

Два события называются **несовместными**, если появление одного из них *исключает* появление другого в одном и том же эксперименте; в противном случае события называются **совместными**.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются **попарно-несовместными**, если любые два из них несовместные.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют **полную группу**, если они попарно-несовместные и в результате каждого эксперимента происходит *одно и только одно* из них.

Несколько событий в данном эксперименте называются **равновозможными**, если ни одно из них не является объективно более возможным, чем другие (т. е. все события имеют равные «шансы»).

Множество *всех возможных* взаимоисключающих событий (исходов) данного эксперимента называется **пространством элементарных событий** (ПЭС), а сами исходы – **элементарными событиями**.

Суммой событий A и B называется событие $C = A + B$, состоящее в наступлении, по крайней мере, одного из событий A или B, т. е. в наступлении события A, или события B, или обоих этих событий вместе, если они совместны.

Произведением событий A и B называется событие $C = A \cdot B$, состоящее в том, что в результате испытания произошло и событие A, и событие B, т. е. оба события произошли.

Разностью событий A и B называется событие $C = A \setminus B$, состоящее в том, что произошло событие A, но не произошло событие B.

Событие A **влечёт событие** B (или A является частным случаем B), если из того, что происходит событие A , следует наступление события B ; записывают это так: $A \subseteq B$.

Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то события A и B называются **равными**; это обозначают так: $A = B$.

Противоположным событию A называют событие $\overline{A}$, которое происходит тогда и только тогда, когда *не происходит* событие A .

Элементарные события, которые приводят к наступлению события A , называются событиями **благоприятными** или **благоприятствующими** для наступления события A .

3. Вероятность случайного события.

Вероятность события численно характеризует степень возможности его появления в рассматриваемом опыте.

Вероятностью события A называется отношение числа исходов m , благоприятствующих его наступлению, к числу всех исходов n (несовместных, единственно возможных и равновозможных) в рассматриваемом эксперименте:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Такое определение вероятности называется классическим.
Из классического определения следуют свойства вероятности: $0 \le P(A) \le 1$; $P(\text{Ш}) = 0$; $P(\Omega) = 1$; $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

4. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

Теорема сложения вероятностей

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B) = P(A) + P(B)$.
В случае, когда события A и B совместны, вероятность их суммы выражается формулой: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$,
где AB – произведение событий A и B .

Теорема умножения вероятностей

Условной вероятностью события A при условии B (обозначается $P(A/B)$) называется вероятность события A, найденная при условии, что событие B произошло. Эта вероятность находится по формуле $P(A/B)=\dfrac{P(A\cdot B)}{P(B)}$. Аналогично определяется условная вероятность события B при условии A: $P(B/A)=\dfrac{P(A\cdot B)}{P(A)}$.

Теорема умножения вероятностей для *зависимых* событий.

Вероятность произведения двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A), \text{ или } P(AB)=P(B)\cdot P(A/B).$$

Следствие. Вероятность совместного наступления двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий: $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$.

Следствие. При производимых n одинаковых независимых испытаниях, в каждом из которых события A появляется с вероятностью p, вероятность появления события A хотя бы один раз равна $1-(1-p)^n$.

5. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.

Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n$ – полная группа попарно-несовместных событий (такие события будем называть **гипотезами**) т. е. $H_i\cdot H_j=0$, $\sum_{i=1}^{n} H_i=\Omega$ и A – событие, которое может произойти только *совместно* с одним из них.

Пусть, кроме того, нам известны $P(H_i)$ и условные вероятности $P(A/H_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

Тогда вероятность события A вычисляется по формуле:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+\ldots+P(H_n)\cdot P(A/H_n)=$$

$=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i)$ - эта формула называется **формулой полной вероятности.**

После проведённого эксперимента прежние (априорные – доопытные) вероятности гипотез $P(H_i)$ должны быть заменены новыми условными вероятностями, которые вычисляются по формулам:

$P(H_i / A) = \dfrac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{P(A)}$, $i = 1,2,\ldots,n$ - эти формулы называются **формулами Байеса**. Они позволяют произвести пересчет вероятностей гипотез, если событие A уже произошло.

6. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли.

Формула Бернулли

Пусть проводится n независимых испытаний, в каждом из которых может произойти событие A *с одной и той-же вероятностью* p (по традиции такой исход опыта называют *успехом*), либо не появиться с вероятностью $q = 1 - p$. Рассмотрим событие B_m, состоящее в том, что событие A в этих n испытаниях наступит ровно m раз и, следовательно, не наступит ровно $(n - m)$ раз. Обозначим A_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ появление события A, а $\overline{A_i}$ - непоявление события A в i-м испытании. В силу постоянства условий испытания имеем:

$$P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n) = p,$$

$$P(\overline{A_1}) = P(\overline{A_2}) = \ldots = P(\overline{A_n}) = 1 - p = q.$$

Событие A может появиться m раз в разных последовательностях или комбинациях, чередуясь с противоположным событием $\overline{A}$. Число возможных комбинаций такого рода равно числу сочетаний из n элементов по m, т. е. C_n^m. Следовательно, событие B_m можно представить в виде суммы сложных несовместных между собой событий, причем число слагаемых равно C_n^m: $B_m = A_1 A_2 \ldots A_m \overline{A}_{m+1} \ldots \overline{A_n} + \ldots + \overline{A_1}\,\overline{A_2} \ldots \overline{A}_{n-m} A_{n-m+1} \ldots A_n$, где в каждое произведение событие A входит m раз, а $\overline{A}$ —$(n - m)$ раз.

Вероятность каждого сложного события, входящего в эту формулу, по теореме умножения вероятностей для независимых событий равна $p^m q^{n-m}$. Так как общее количество таких событий равно

C_n^m, то, используя теорему сложения вероятностей для несовместных событий, получаем вероятность события B_m (обозначим ее $P_n(A,m)$): $P_n(A,m)=C_n^m p^m q^{n-m}$ или $P_n(A,m)=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}p^m q^{n-m}$,

- эту формулу называют **формулой Бернулли**, а повторяющиеся испытания, удовлетворяющие условию независимости и постоянства вероятностей появления в каждом из них события A, называют **испытаниями по схеме Бернулли**, или **схемой Бернулли**.

7. Приближённые формулы в схеме Бернулли. Формула Пуассона. Локальная формула Муавра-Лапласа. Интегральная формула Муавра-Лапласа.

Формула Бернулли – точная формула. Однако при больших значениях n (большом числе испытаний) вычисления по ней становятся громоздкими из-за необходимости вычисления факториалов больших чисел и степеней с большими показателями. В процессе этих вычислений неизбежно придется производить округления, что приведет к погрешности при определении искомой вероятности $P_n(A,m)$. Причем к погрешности тем большей, чем больше будет значение n (числа испытаний). В связи с этим из формулы Бернулли выведены упрощенные приближенные формулы для $P_n(A,m)$, которые, тем точнее, чем больше число n.

Формула Пуассона

Если число испытаний n достаточно велико, а вероятность p достаточно мала, (обычно достаточно условий $p<0{,}1$; $npq<10$), то вероятность $P_n(A,m)$ можно приближенно найти по формуле Пуассона:

$$P_n(A,m)=\frac{a^m e^{-a}}{m!}, \text{ где } a=np.$$

Локальная теорема Муавра-Лапласа

Если число испытаний n достаточно велико, а вероятности p и q не очень близки к нулю (обычно достаточно условий $n>100$; $npq>20$), то вероятность $P_n(A,m)$ можно приближенно найти по формуле Муавра-Лапласа:

$$P_n(A,m)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

где $x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ - функция Гаусса.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа

В условиях локальной формулы Муавра-Лапласа вероятность $P_n(m_1\le m\le m_2)$ того, что число успехов m заключено между числами m_1 и m_2, можно приближенно найти по интегральной формуле Муавра-Лапласа:

$$P_n(m_1\le m\le m_2)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1),$$

где $x_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ – функция Лапласа.

Значение функций Гаусса и Лапласа находятся по таблицам 1 стр. 39 и 2 стр.40.

Формулы Бернулли, Муавра-Лапласа и Пуассона применяются в тех случаях, когда рассматриваются испытания, удовлетворяющие схеме Бернулли. При этом важно правильно выбрать соответствующую формулу.

8. Случайные величины. Понятие случайной величины. Дискретные случайные величины. Числовые характеристики дискретных случайных величин.

Рассмотрим те эксперименты, результатом которых являются числа.

Под **случайной величиной** понимают величину, которая в результате опыта со случайным исходом принимает то или иное числовое значение, заранее не известное, какое именно.

Случайные величины (кратко с.в.) обозначают большими латинскими буквами X, Y,..., а принимаемые ими значения – малыми латинскими буквами $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$.

То есть случайная величина X есть числовая функция, определённая на пространстве элементарных событий Ω.

Таким образом, с.в. X каждому элементарному событию ставит в соответствие некоторое действительное число.

Для того, чтобы получить полное представление о данной случайной величине, недостаточно знать, какие значения она принимает – важно знать *насколько часто* они принимаются этой величиной («выпадают») в результате испытаний. Для этой цели существует понятие **закона распределения**. Любое правило (таблица, функция, график), позволяющее находить вероятности произвольных событий (в частности, вероятности того, что данная с.в. примет конкретное значение или попадёт в заданный интервал), называется **законом распределения случайной величины (или распределением).**

Если для с.в. X задан закон распределения, то говорят, что с.в. X распределена по этому закону. Одним из наиболее удобных и универсальных способов задания закона распределения является **функция** распределения.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(X)$, выражающая для каждого X вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x: $F(x) = P(X < x)$.

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1. $0 \le F(x) \le 1$;
2. $F(x)$ - неубывающая функция, т.е. $F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2 > x_1$;
3. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$;
4. $F(x)$ непрерывна слева в любой точке x, $F(x-0) = F(x)$, $x \in R$;
5. $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$.

Дискретной называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями.

Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Закон распределения дискретной случайной величины удобно задавать с помощью таблицы, называемой **рядом распределения**.

Числовые характеристики дискретных случайных величин. Это параметры, характеризующие наиболее важные черты закона распределения дискретной случайной величины.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности: $M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – возможные значения случайной величины X, а $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – соответствующие вероятности.

Замечание. Вышеприведенная формула справедлива для дискретной случайной величины, число возможных значений которой конечно. Если же случайная величина имеет счетное число возможных значений, то для нахождения математического ожидания используют формулу: $M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$,

причем это математическое ожидание существует при выполнении соответствующего условия сходимости числового ряда в правой части равенства.

Вероятностный смысл математического ожидания: математическое ожидание приближенно равно (тем точнее, чем больше число испытаний) среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: $M(C) = C$.

2. Постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания: $M(CX) = C \cdot M(X)$.

3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий: $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$.

Следствие. Математическое ожидание произведения нескольких взаимно независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

4. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y).$$

Следствие. Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.

Разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием называется **отклонением**.

Следствие. Математическое ожидание отклонения равно нулю: $M(X - M(X)) = 0$.

Дисперсией дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величиной от ее математического ожидания:

$$D(X) = M\left([X - M(X)]^2\right).$$

Дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины.

Вычислительная формула для дисперсии.

Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания:

$$D(X) = M\left(X^2\right) - [M(X)]^2.$$

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины равно нулю: $D(C) = 0$.
2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат: $D(CX) = C^2 \cdot D(X)$.
3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равно сумме дисперсий этих случайных величин:
$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Следствие. Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равно сумме дисперсий этих величин.

4. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равно сумме дисперсий этих случайных величин:
$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Размерность среднего квадратического отклонения совпадает с размерностью самой случайной величины.

9. Непрерывные случайные величины. Плотность распределения непрерывной случайной величины. Функция распределения непрерывной случайной величины.

Функцию распределения $F(X)$ иногда называют интегральной функцией распределения, или интегральным законом распределения.

Случайная величина X называется **непрерывной**, если ее функция распределения $F(x)$ непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, кроме, быть может, отдельных точек.

Примеры непрерывных случайных величин: диаметр детали, которую токарь обтачивает до заданного размера, рост человека, дальность полета снаряда и др.

Свойство. Если X - непрерывная случайная величина, то вероятность попадания случайной величины в интервал (x_1, x_2) не зависит от того, является этот интервал открытым или закрытым, т. е.:

$$P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \le X < x_2) = P(x_1 < X \le x_2) = P(x_1 \le X \le x_2)$$

Если непрерывная случайная величина X может принимать только значения в границах от a до b (где a и b — некоторые постоянные), то функция распределения ее равна нулю для всех значений $x \le a$ и единице для значений $x > b$.

Для непрерывной случайной величины:

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Все свойства функций распределения дискретных случайных величин выполняются и для функций распределения непрерывных случайных величин.

Задание непрерывной случайной величины с помощью функции распределения не является единственным.

Плотностью вероятности (Плотностью распределения или Плотностью) $f(x)$ непрерывной случайной величины X называется производная ее функции распределения:

$$f(x) = F'(x).$$

Плотность вероятности $f(x)$, как и функция распределения $F(X)$, является одной из форм закона распределения, но в отличие от функции распределения она существует только для непрерывных случайных величин.

Плотность вероятности иногда называют **дифференциальной функцией**, или **дифференциальным законом распределения**.

Если функция распределения $F(x)$ непрерывна, то случайная величина x называется **непрерывной случайной величиной (н.с.в.)**.

Если функция распределения непрерывной случайной величины дифференцируема, то более наглядное представление о случайной величине дает плотность вероятности случайной величины $f(x)$, которая связана с функцией распределения $F(x)$ формулами:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx \text{ и } f(x)=\frac{dF(x)}{dx}.$$

Отсюда, в частности, следует, что для любой случайной величины:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

10. Важнейшие распределения непрерывных случайных величин.

Равномерный закон распределения.

На практике встречаются случайные величины, о которых заранее известно, что они могут принять какое-либо значение в строго определенных границах, причем в этих границах все значения случайной величины имеют одинаковую вероятность (обладают одной и той же плотностью вероятности).

Например, время ожидания транспорта – величина случайная. К подобным случайным величинам относится также и погрешность округления результата измерения до ближайшего целого числа. Про такие величины говорят, что они распределены равномерно, т. е. имеют равномерное распределение.

Определение. Непрерывная случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[a,b]$, если на этом отрезке плотность распределения вероятности случайной величины постоянна, т. е. дифференциальная функция распределения $f(x)$ имеет следующий вид:

$$f(x)=\begin{cases} c, x\in[a,b]; \\ 0, x\notin[a,b]. \end{cases}$$

Иногда это распределение называют **законом равномерной плотности распределения**. Про величину, которая имеет равномерное распределение на некотором отрезке, будем говорить, что она распределена равномерно на этом отрезке.

Найдем значение постоянной c. Так как площадь, ограниченная кривой распределения и осью Ox, равна 1, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{a}^{b} cdx = c(b-a) = 1, \text{ откуда } c = \frac{1}{(b-a)}.$$

Таким образом, функцию равномерной плотности распределения $f(x)$ можно представить в виде:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < a, \\ \dfrac{1}{b-a}, \text{ при } a \le x \le b, \\ 0, \text{ при } x > b. \end{cases}$$

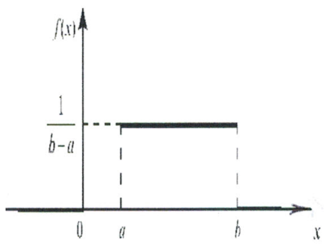
Построим функцию распределения $F(x)$, для чего найдем выражение $F(x)$ на интервале $[a,b]$:

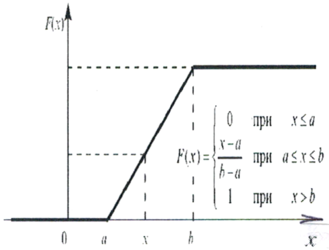
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dx = \left.\frac{x}{b-a}\right|_{a}^{x} = \frac{x-a}{b-a}.$$

При $x < a$ функция $F(x) = 0$ и $F(x) = 1$ при $x > b$. Таким образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{ при } a \le x \le b, \\ 1, \text{ при } x > b. \end{cases}$$

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ имеют вид:





Найдем числовые характеристики.

Используя формулу для вычисления математического ожидания непрерывной случайной величины, имеем:

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx=\int_a^b \frac{x}{b-a}dx=\frac{b+a}{2}.$$

Таким образом, математическое ожидание случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $[a,b]$, совпадает с серединой этого отрезка.

Найдем дисперсию равномерно распределенной случайной величины:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx=\int_a^b\left(x-\frac{b+a}{2}\right)^2\frac{1}{b-a}dx=$$

$=\dfrac{(b-a)^2}{12}$, откуда сразу же следует, что среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X)\ =\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Найдем теперь вероятность попадания значения случайной величины, имеющей равномерное распределение, на интервал (α,β), принадлежащий целиком отрезку $[a,b]$:

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta\frac{dx}{b-a}=\frac{\beta-\alpha}{b-a},$$

Геометрически эта вероятность представляет собой площадь прямоугольника с длиной нижнего основания $\beta-\alpha$ и высотой

$\frac{1}{b-a}$. Числа a и b называются параметрами распределения и однозначно определяют равномерное распределение.

Показательное распределение.

Определение: Непрерывная случайная величина X, функция плотности которой задается выражением:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x>0;\\ 0, x\le 0,\end{cases}$$

называется **случайной величиной**, имеющей показательное, или **экспоненциальное** распределение.

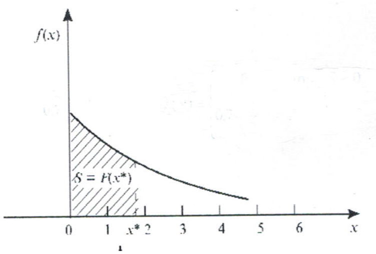
Величина срока службы различных устройств и времени безотказной работы отдельных элементов этих устройств при выполнении определенных условий обычно подчиняется показательному распределению. Другими словами, величина промежутка времени между появлениями двух *последовательных редких* событий подчиняется зачастую показательному распределению.

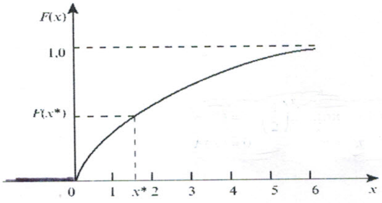
Как видно из формулы, показательное распределение определяется только одним параметром λ.

Найдем функцию распределения показательного закона, используя свойства функции распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{при}\, x\le 0;\\ \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int\limits_{0}^{x}\lambda e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda x}\ \text{при}\, x>0.\end{cases}$$

Графики $f(x)$ и $F(x)$ функций показательного распределения имеют вид:





Числовые характеристики.

Используя формулы для вычисления математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения нетрудно убедится, что для показательного распределения:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2},\quad \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

Таким образом, для показательного распределения характерно, что среднее квадратическое отклонение численно равно математическому ожиданию.

Вероятность попадания случайной величины X в интервал (a,b): $P(a<X<b)=F(b)-F(a)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$.

Нормальный закон распределения.

Вероятность попадания в заданный интервал. Одним из наиболее часто встречающихся распределений является нормальное распределение. Оно играет большую роль в теории вероятностей и занимает среди других распределений особое положение. Нормальный закон распределения является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при часто встречающихся аналогичных условиях.

Если некоторая случайная величина представляет собой сумму достаточно большого числа других случайных величин, то данная случайная величина обычно подчиняется нормальному закону распределения. Суммируемые случайные величины, могут подчиняться каким угодно распределениям, но при этом должно выполняться условие их *независимости* (или *слабой зависимости*). При соблюдении некоторых не очень жестких условий указанная сумма случайных величин подчиняется приближенно нормальному закону распределения и тем точнее, чем большее количество величин суммируется.

Ни одна из суммируемых случайных величин *не должна* резко *отличаться от других*, т. е. каждая из них должна играть в общей сумме примерно одинаковую роль и не *иметь* исключительно *большую* по сравнению с другими величинами *дисперсию*.

Для примера рассмотрим изготовление некоторой детали на станке-автомате. Размеры изготовленных деталей несколько отличаются от требуемых. Это отклонение размеров от стандарта вызывается различными причинами, которые более или менее независимы друг от друга. К ним могут относиться: неравномерный режим обработки детали; неоднородность обрабатываемого материала; неточность установки заготовки в станке; износ режущего инструмента и деталей станков; упругие деформаций узлов станка; состояние микроклимата в цехе; колебание напряжения в электросети и т. д. Каждая из перечисленных и подобных им причин влияет на отклонение размера изготовляемой детали от стандарта. Таким образом, общее отклонение размера, фиксируемое измерительным прибором, является суммой большего числа отклонений, обусловленных различными причинами. Если ни одна из этих причин не является доминирующей, то суммарное отклонение является случайной величиной, имеющей нормальный закон распределения.

Нормальному закону подчиняются только непрерывные случайные величины, это распределение можно задать в виде плотности распределения вероятности.

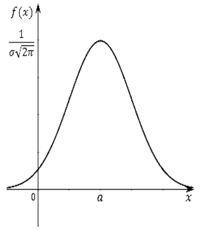
Определение. Непрерывная случайная величина X имеет **нормальное распределение (распределена по нормальному закону)**, если её плотность распределения $f(x)$ имеет вид:

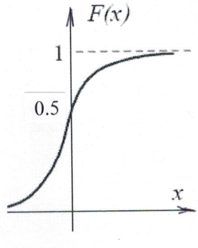
$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где a и σ - некоторые постоянные, называемые параметрами нормального распределения.

Функция распределения $F(x)$ в рассматриваемом случае принимает вид: $F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$.

Параметр a - есть математическое ожидание н.с.в. X, имеющей нормальное распределение, σ - среднее квадратическое отклонение, тогда дисперсия равна: $D(X)=\sigma^2$.

График плотности нормального распределения $f(x)$ имеет вид: эту кривую называют кривой Гаусса или **нормальной кривой**.





Образец решения варианта контрольной работы

Пример 1.а.

Абонент забыл последние 2 цифры телефонного номера, но помнит, что они различны и образуют двузначное число, меньшее 30. С учетом этого он набирает наугад 2 цифры. Найти вероятность того, что это будут нужные цифры.

Решение: Используем классическое определение вероятности: $P = m/n$, где n - число всех возможных элементарных исходов рассматриваемого опыта, m - число элементарных исходов, благоприятствующих осуществлению события. $m = 1$, так как только один номер правильный. Подсчитаем количество всех возможных двузначных чисел с разными цифрами, меньшее 30, которые может набрать абонент. Это числа – 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29.

Таких чисел n=18 штук. Тогда искомая вероятность $P = 1/18$.

Пример 1.б.

Из 13 лотерейных билетов 5 - выигрышных. Студент вынимает наудачу 3 билета. Какова вероятность того, что у студента один из трех билетов выигрышный?

Решение:

Применяем формулу классической вероятности и находим вероятность того, что у студента один билет из пяти будет выигрышным (два билета невыигрышными): $P(A)=\frac{m}{n}$, - где $m=C_5^1C_8^2$ - число способов взять один билет выигрышный и два невыигрышных, $n=C_{13}^3$ - число всех способов взять 3 из 13 билетов.

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_5^1C_8^2}{C_{13}^3}=\frac{140}{286}\approx 0{,}49 .$$

Пример 2.

Ребенок имеет на руках 5 кубиков с буквами: А, К, К, Л, У. Какова вероятность того, что ребенок соберет из кубиков слово "кукла"?

Решение: Рассмотрим следующие случайные события: событие $A=\{$получится слово КУКЛА$\}$, $A_1=\{$первой, выбранной наугад буквой будет К$\}$, $A_2=\{$второй – У$\}$, $A_3=$ $=\{$третьей – К$\}$, $A_4=\{$четвёртой – Л$\}$, $A_5=\{$пятой – А$\}$.

Тогда $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5$. Применяя правило умножения вероятностей зависимых событий, имеем:

$$P(A)=P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot A_4\cdot A_5)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\times$$
$$\times P(A_4/A_1A_2A_3)\cdot P(A_5/A_1A_2A_3A_4)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{60}.$$

Пример 3.

В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием – К, 30% – с заболеванием L, 20% – с заболеванием М. Вероятность полного излечения болезни К равна 0,7; для болезней L и М эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием К.

Решение:

Введем обозначения: событие: А = {больной выздоровеет}.

Предположения (гипотезы):

$H_1=\{$страдал болезнью К$\}$, $H_2=\{$страдал болезнью Л$\}$, $H_3=\{$страдал болезнью М$\}$.

Вероятности гипотез:

$P(H_1) = 0.5,\ P(H_2) = 0.3,\ P(H_3) = 0.2.$

Условные вероятности: больной, страдающий болезнью К, выздоровеет – $P(A/H_1) = 0{,}7$, больной, страдающий болезнью Л, выздоровеет – $P(A/H_2) = 0{,}8$, больной, страдающий болезнью М, выздоровеет – $P(A/H_3) = 0{,}9$.

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) + P(H_3)\cdot P(A/H_3) =$$
$$= 0{,}5\cdot 0{,}7 + 0{,}3\cdot 0{,}8 + 0{,}2\cdot 0{,}9 = 0{,}77$$

Тогда $P(H_1/A) = \dfrac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \dfrac{0{,}5\cdot 0{,}7}{0{,}77} = 0{,}45$ – по формуле Байеса.

Пример 4.а.

Найти вероятность того, что из 5 выбранных аккумуляторов 2 выйдут из строя, если вероятность выхода аккумулятора из строя p=0,07.

Решение: Будем использовать формулу Бернулли (вероятность того, что в 5 испытаниях событие произойдет 2 раза).

$$P_5(A,2) = C_5^2(0{,}07)^2(1-0{,}07)^3 = \frac{5!}{2!3!}(0{,}07)^2(0{,}93)^3 = 0{,}0394$$

Пример 4.б.

Вычислительное устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказа каждого элемента за смену равна p=0,024. Найти вероятность, что за смену откажут 6 элементов.

Решение: Используем локальную теорему Лапласа:

$P_n(A,m) = \dfrac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)$, где n=1000, m=6, p=0,024, q=1-p=0,976, значения функции берутся из таблицы. Подставляя, получим:

$$P_{1000}(A,6) = \frac{1}{\sqrt{1000\cdot 0{,}024\cdot 0{,}976}}\varphi\left(\frac{6-1000\cdot 0{,}024}{\sqrt{1000\cdot 0{,}024\cdot 0{,}976}}\right) =$$
$$= 0{,}21\varphi(-3{,}72) = 0{,}21\varphi(3{,}72) = 0{,}21\cdot 0.004 = 0{,}000084.$$

Пример 5.а Известно, что в некотором городе 20 % горожан добираются на работу личным автотранспортом. Случайно выбраны 4 человека. Составить закон распределения числа людей, добирающихся на работу личным автотранспортом. Найти числовые характеристики этого распределения. Написать функцию распределения и построить ее график.

Решение: В качестве случайной величины X выступает число людей, которые добираются на работу личным автотранспортом. Возможные значения, которые может принять случайная величина X: 0, 1, 2, 3, 4. Событие $A = \{$человек добирается на работу личным транспортом$\}$.

Вероятность того, что каждый из отобранных людей, которые добираются на работу личным автотранспортом, постоянна и равна $p = 0{,}2$. Вероятность противоположного события, т. е. того, что каждый из отобранных людей добирается на работу не личным автотранспортом, равна $q = 1 - p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$. Все 4 испытания независимы. Случайная величина $X = m$ подчиняется биномиальному закону распределения вероятностей с параметрами $n = 4; \quad p = 0{,}2; \quad q = 0{,}8$. Для составления закона распределения вычислим вероятности того, что случайная величина примет каждое из своих возможных значений.

Расчет искомых вероятностей осуществляется по формуле Бернулли: $P_n(A,m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$.

$$P(X=0) = P_4(A,0) = C_4^0 \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^{4-0} = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}4096,$$

$$P(X=1) = P_4(A,1) = C_4^1 \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^{4-1} = 4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^3 = 0{,}4096,$$

$$P(X=2) = P_4(A,2) = C_4^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^{4-2} = 6 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}1536,$$

$$P(X=3) = P_4(A,3) = C_4^3 \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^{4-3} = 4 \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8 = 0{,}0256,$$

$$P(X=4) = P_4(A,4) = C_4^4 \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^{4-4} = 1 \cdot 0{,}2^4 \cdot 1 = 0{,}0016.$$

Запишем закон распределения (ряд распределения) в виде таблицы:

X	0	1	2	3	4
P	0,4096	0,4096	0,1536	0,0256	0,0016

Так как все возможные значения случайной величины образуют полную группу событий, то сумма их вероятностей должна быть равна 1.

Проверка: 0,4096 + 0,4096 + 0,1536 + 0,0256 + 0,0016 = 1.

Найдем числовые характеристики дискретной случайной величины: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Математическое ожидание может быть рассчитано по формуле:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 = 0 \cdot 0{,}4096 + 1 \cdot 0{,}4096 +$$

$$+ 2 \cdot 0{,}1536 + 3 \cdot 0{,}0256 + 4 \cdot 0{,}0016 = 0{,}8 .$$

Так как случайная величина подчиняется биномиальному закону, то для расчета математического ожидания можно воспользоваться формулой:

$$M(X) = np = 4 \cdot 0{,}2 = 0{,}8$$

Дисперсия случайной величины может быть рассчитана по формуле:

$$D(X) = M\left([X - M(X)]^2\right) = M\left(X^2\right) - \left(M(X)\right)^2 ;$$

$$\left(M(X)\right)^2 = 0{,}8^2 = 0{,}64 ,$$

$$M\left(X^2\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} p_i = 0 \cdot 0{,}4096 + 1 \cdot 0{,}4096 + 4 \cdot 0{,}1536 + 9 \cdot 0{,}0256 +$$

$$+16 \cdot 0{,}0016 = 1{,}28 ,$$

$$D(X) = 1{,}28 - 0{,}64 = 0{,}64 .$$

В данном случае дисперсию можно рассчитать и по формуле: $D(X) = npq = 4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}64$.

Рассчитаем среднее квадратическое отклонение случайной величины по формуле: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$.

Составим функцию распределения случайной величины X по формуле: $F(x) = P(X < x)$.

При $x \le 0, \quad F(x) = 0$;

при $0 < x \le 1, \quad F(x) = 0{,}4096$;

при $1 < x \le 2, \quad F(x) = 0{,}4096 + 0{,}4096 = 0{,}8192$;

при $2 < x \le 3, \quad F(x) = 0{,}4096 + 0{,}4096 + 01536 = 0{,}9728$;

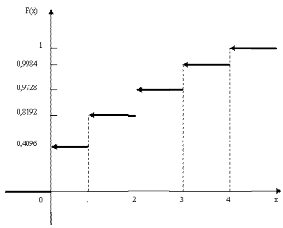
при $3 < x \le 4, F(x) = 0{,}4096 + 0{,}4096 + 01536 + 0{,}0256 = 0{,}9984$;

при $x > 4, \quad F(x) = 1$.

Запишем функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 0{,}4096, & 0 < x \le 1; \\ 0{,}8192, & 1 < x \le 2; \\ 0{,}9728, & 2 < x \le 3; \\ 0{,}9984, & 3 < x \le 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

График функции распределения вероятностей имеет ступенчатый вид. Скачки равны вероятностям, с которыми случайная величина принимает возможные значения:



Пример 5.б. Известна плотность вероятности случайной величины:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ a \sin x, & \text{при } 0 < x \le \pi, \\ 0, & \text{при } x \ge \pi. \end{cases}$$

Найти: а) параметр a; б) функцию распределения $F(x)$; в) вероятность попадания X в интервал $(-\pi/4; \pi/4)$. Построить графики $f(x), F(x)$.

Решение: Зная свойства плотности вероятности - функции $f(x)$, найдем неизвестный параметр a. Из неравенства $f(x) \geq 0$, делаем вывод, что $a > 0$. Далее:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{\pi} a \cdot \sin x\, dx + \int_{\pi}^{\infty} 0 \cdot dx = \int_{0}^{\pi} a \cdot \sin x\, dx .$$

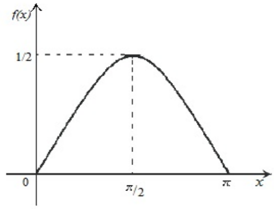
Вычислим данный интеграл. Зная, что его значение должно быть равно единице, выразим a.

$$\int_{0}^{\pi} a \cdot \sin x\, dx = -a \cos x \Big|_{0}^{\pi} = -a \cdot \cos \pi + a \cdot \cos 0 = a - (-a) = 2a ,$$

зная, что $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

получаем $2a = 1$, отсюда $a = \dfrac{1}{2}$.

График функции $f(x)$ - плотности распределения вероятностей случайной величины представлен на рисунке:



Для нахождения функции $F(x)$ используем формулу, определяющую интегральную функцию распределения. Так как $f(x)$ задана различным образом на трех разных интервалах, то выражение для $F(x)$ находим отдельно для каждого интервала.

Если $x \leq 0$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx = 0$.

Если $0 < x \leq \pi$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{x} \frac{1}{2} \cdot \sin x\, dx = 0 + \frac{1}{2}(-\cos x)\Big|_{0}^{x} = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$$

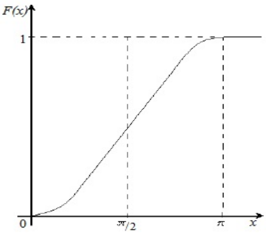
Если $x > \pi$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2} \cdot \sin x\, dx + \int_{\pi}^{x} 0 \cdot dx = \frac{1}{2}(-\cos x)\Big|_{0}^{\pi} = 1.$$

Искомая интегральная функция принимает окончательный вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0; \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x), & \text{при } 0 < x \le \pi; \\ 1, & \text{при x} > \pi. \end{cases}$$

График функции $F(x)$ представлен ниже:



Вероятность попадания случайной величины X в интервал $(-\pi/4; \pi/4)$, найдем по формуле:

$P(a < x < b) = F(b) - F(a)$. Получим:

$$P\left(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\right) = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right) - 0 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Вариант 1.

1. а) В урне 5 белых и 4 черных шара. Из урны вынимают один шара. Какова вероятность того, что он белый?

   б) Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором три вопроса.

2. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

3. Обследовалась группа из 10000 человек в возрасте свыше 60 лет. Оказалось, что 4000 человек являются постоянно курящими. У 1800 курящих обнаружились серьезные изменения в легких. Среди некурящих изменения в легких имели 1500 человек. Какова вероятность того, что наугад обследованный человек, имеет из-

менения в легких? Какова вероятность того, что наугад обследованный человек, имеющий изменения в легких, является курящим?

4. а) Что более вероятно выиграть у равносильного противника: не менее двух партий из трёх или не более одной из двух при игре в шахматы?

б) С базы в магазин отправлено 4000 тщательно упакованных доброкачественных изделий. Вероятность того, что изделие повредится в пути, равна 0.0005. Найти вероятность того, что из 4000 изделий в магазин прибудут 3 испорченных изделия.

5. а) Найти математическое ожидание и дисперсию суммы очков, выпадающих на двух игральных костях при одном бросании.

б) При каких значениях параметров k и b функция $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 2 \\ kx+b, & -1<x\le 2 \\ 1, & 2<x \end{cases}$ может быть функцией распределения некоторой непрерывной случайной величины X? Найти вероятность $P(-2{,}3\le X\le 1{,}5)$. Построить графики функции распределения $F(x)$ и плотности распределения $f(x)$ этой случайной величины.

Вариант 2.

1. а) В магазин поступило 40 новых цветных телевизоров, среди которых 7 имеют скрытые дефекты. Наудачу отбирается один телевизор для проверки. Какова вероятность, что он не имеет скрытых дефектов?

б) Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранные билета окажутся выигрышными.

2. В первом ящике находится 2 белых и 5 черных шаров, во втором ящике - 3 белых и 2 черных шара. Из каждого ящика вынимают по одному шару. Найти вероятность того, что оба вынутых шара - черные.

3. Магазин получает электролампочки с двух заводов, причем доля первого завода составляет 25 %. Известно, что доля брака на этих заводах равна соответственно 5 % и 10 % от всей выпускаемой продукции. Продавец наугад берет одну лампочку. Какова вероятность того, что она окажется бракованной?

4. а) Устройство, состоит из пяти независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого из них равна 0,2. Найти вероятность того, что откажут: три элемента; не менее четырех элементов; хотя бы один элемент.

б) Найти вероятность того, что если бросить монету 200 раз, то орел выпадет от 90 до 110 раз.

5. а) В городе 4 коммерческих банка. У каждого риск банкротства в течение года составляет 20%. Составьте ряд распределения числа банков, которые могут обанкротиться в течение следующего года.

б) Задана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<3 \\ C(x-3)^2, & 3\le x\le 5. \\ 1, & 5<x \end{cases}$$

Найти коэффициент *C*, плотность распределения $f(x)$. Построить графики $F(x)$, $f(x)$. Найти вероятность $P(3\le X\le 4)$.

Вариант 3.

1. а) 1 сентября на первом курсе одного из факультетов запланированы по расписанию три лекции из 10 различных предметов. Студент, не успевший ознакомиться с расписанием, пытается его угадать. Какова вероятность успеха в данном эксперименте, если считать, что любое расписание из трех предметов равновозможно.

б) В ящике среди 100 деталей находится одна бракованная. Из ящика наудачу извлечены 10 деталей. Найти вероятность того, что среди них окажется одна бракованная.

2. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной и той же цели. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,8; для второго - 0,9. Найти вероятность поражения цели.

3. Из 1000 ламп 380 принадлежат к 1 партии, 270 – ко второй партии, остальные к третьей. В первой партии 4% брака, во второй - 3%, в третьей – 6%. Наудачу выбирается одна лампа. Определить вероятность того, что выбранная лампа – бракованная.

4. а) Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,9. Определить вероятность того, что из трех наудачу взятых деталей: две окажутся стандартными; все три окажутся стандартными.

б) Прививка от гриппа дает положительный результат в 70% случаев. Найти вероятность, что в группе из 15 человек более чем для двух она будет бесполезной.

5. а) Охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более четырех выстрелов. Составить закон распределения числа промахов, если вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Найти дисперсию этой случайной величины.

б) При каких значениях параметров k и b функция $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 3 \\ kx+b, & 3 < x \le 5 \\ 1, & 5 < x \end{cases}$

может быть функцией распределения некоторой непрерывной случайной величины X? Найти вероятность $P(-3 \le X \le 1{,}5)$. Построить графики функции распределения $F(x)$, $f(x)$ этой случайной величины.

Вариант 4.

1. а) Даны 5 карточек с буквами А, И, Л, М, Я. Найти вероятность того, что получится слово МИЛАЯ, если карточки выбираются наугад одна за другой и располагаются в ряд в порядке появления.

б) В урне 3 белых и 7 черных шаров. Из урны вынимают (с возвращением вынутого шара обратно) два шара. Какова вероятность того, что хотя бы один раз появится белый шар?

2. В колоде 36 карт. Наугад вынимают 4 карты. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы один туз.

3. Фирма имеет три источника поставки комплектующих – фирмы *A*, *B* и *C*. На долю фирмы *A* приходится 50% общего объема поставок, *B* – 30% и *C* – 20%. Из практики известно, что 10% поставляемых фирмой *A* деталей бракованные, фирмой *B* – 5% и фирмой *C* – 6%.

1) Какова вероятность, что взятая наугад деталь оказалась бракованной?

2) Какова вероятность, что взятая наугад и оказавшаяся бракованной деталь получена от фирмы *A*?

4. а) Монету бросают 6 раз. Выпадение герба и решки равновероятно. Найти вероятность того, что: герб выпадет три раза; герб выпадет один раз; герб выпадет не менее двух раз.

б) Решить задачу в условиях схемы Бернулли. Рыбак забрасывал спиннинг 10 раз. Найти вероятность того, что он поймал хотя бы одну рыбу, если одна рыба приходится в среднем на 12 забрасываний спиннинга.

5. а) В магазине продаются 5 отечественных и 3 импортных телевизора. Составить закон распределения случайной величины – числа импортных из четырех наудачу выбранных телевизоров. Найти функцию распределения этой случайной величины и построить ее график.

б) Дана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ bx, & 0\le x<5 \\ 0, & 5\le x \end{cases}.$$

Определить постоянную b, найти функцию распределения $F(x)$, вычислить вероятность $P(3\le X\le 5)$. Построить графики $F(x)$, $f(x)$ этой случайной величины.

Вариант 5.

1. а) Код домофона состоит из трёх цифр, которые могут повторяться. Какова вероятность, что, случайно набирая цифры, можно угадать код?

б) В коробке находится 4 синих, 5 красных и 5 зеленых карандашей. Наугад одновременно вынимают 10 карандашей. Найти вероятность того, что среди них будет 3 синих и 3 красных карандаша.

2. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом, втором, третьем справочнике, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятности того, что формула содержится а) только в одном справочнике; б) только в двух справочниках в) во всех трех справочниках.

3. В школе обучается одинаковое количество мальчиков и девочек. У восьмидесяти процентов девочек и у тридцати процентов мальчиков длинные волосы. Какова вероятность того, что у случайно выбранного ученика длинные волосы? Какова вероятность

того, что случайно выбранный ученик с длинными волосами – мальчик?

4. а) Всхожесть семян данного растения составляет 90 %. Найти вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут: четыре; не менее четырех.

б) Какова вероятность, что в группе, состоящей из 30 студентов, никто не родился в январе.

5. а) Вероятность досрочно сдать экзамен на «5» для каждого из четырех сдающих студентов равна 0,6. Случайная величина X – число студентов (из этих четырех), сдавших этот экзамен на «5».

1) Составить закон распределения X.

2) Найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

3) Построить график функции распределения $F(x)$.

4) Найти вероятность $P(0{,}5 < X < 3)$.

б) Дана плотность распределения случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ bx, & 0 \le x < 7 \\ 0, & 7 \le x \end{cases}.$$

Определить постоянную b, найти функцию распределения $F(x)$, найти вероятность $P(0{,}5 < X < 3)$. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$ этой случайной величины.

Вариант 6.

1. а) В коробке находится 5 синих, 4 красных и 3 зеленых карандаша. Наугад одновременно вынимают 3 карандаша. Найти вероятность того, что все они зелёные.

б) В лотерее 30 билетов, из которых 5 выигрышных. Какова вероятность получить более одного выигрышного билета, взяв наудачу 4 билета?

2. В мешке смешаны нити трех цветов: 30% белых, 50% красных, остальные зеленые. Определить вероятность того, что при последовательном вытягивании наугад трех нитей окажется, что все они одного цвета.

3. 45% телевизоров, имеющихся в магазине, изготовлены на 1-м заводе, 15% на – 2-м, остальные – на 3-м заводе. Вероятности, что телевизоры, изготовленные на этих заводах, не потребуют ремонта в течение гарантийного срока, равны 0,96, 0,84, 0,9 соот-

ветственно. Найти вероятность того, что купленный наудачу телевизор выдержит гарантийный срок работы.

4. а) При передаче сообщения по каналу связи вероятность искажения одного знака равна 0,01. Какова вероятность, что при передаче сообщения из 5-и знаков допущено одно искажение?

б) При введении вакцины против птичьего гриппа иммунитет создается в 99,98% случаях. Определите (приближенно) вероятность того, что из 10000 вакцинированных птиц заболеют, по меньшей мере, две птицы.

5. а) Продавец покупает персики большими партиями. Учитывая скоропортящийся характер товара, он допускает, что 15% фруктов будут подпорчены. Для проверки качества продавец выбирает 5 персиков. Случайная величина X – число подпорченных фруктов среди выбранных.

1) Составить ряд распределения X .

2) Найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

3) Построить график функции распределения $F(x)$.

4) Найти вероятность того, что продавец купит данную партию персиков, если для этого среди выбранных 5 персиков должно быть не более двух подпорченных.

б) Дана плотность распределения случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ bx, & 0\le x<4{,}7 \\ 0, & 4{,}7\le x \end{cases}.$$

Определить постоянную b, найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график, вычислить вероятность $P(3\le X\le 5)$. Построить график плотности распределения $f(x)$ этой случайной величины.

Вариант 7.

1. а) Брошены 2 игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков не превосходит 11.

б) В ящике 5 апельсинов и 4 яблока. Наудачу выбираются 3 фрукта. Какова вероятность, что все три фрукта – апельсины?

2. Из аэровокзала отправились 2 автобуса-экспресса к трапам самолётов. Вероятность своевременного прибытия каждого автобуса в аэропорт равна 0,95. Найти вероятность того, что: а) оба

автобуса придут вовремя; б) оба автобуса опоздают; в) только один автобус прибудет вовремя; г) хотя бы один автобус прибудет вовремя.

3. Перед посевом 80% всех семян было обработано ядохимикатами. Вероятность поражения растений, проросших из этих семян, вредителями равна 0,06, а растений, проросших из необработанных семян – 0,3. Какова вероятность того, что взятое наудачу растение окажется поражённым?

4. а) Определить вероятность, что при пяти бросаниях монеты герб выпадет четыре раза.

б) С базы в магазин отправлено 4000 тщательно упакованных доброкачественных изделий. Вероятность того, что изделие повредится в пути, равна 0.0005. Найти вероятность того, что из 4000 изделий в магазин прибудут 3 испорченных изделия.

5. а) Производятся независимые испытания трех приборов. Вероятности отказа для них 0,2, 0,3, 0,1 соответственно. Случайная величина X – число отказавших приборов.

1) Составить закон распределения X.

2) Найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

3) Построить график функции распределения $F(x)$.

4) Найти вероятность $P(0{,}5 \le X \le 3)$.

б) Дана плотность распределения случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ bx, & 0 \le x < 3{,}2 \\ 0, & 3{,}2 \le x \end{cases}.$$

Определить постоянную b, найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график, вычислить вероятность $P(2{,}3 \le X \le 5{,}1)$. Построить график плотности распределения $f(x)$ этой случайной величины.

Вариант 8.

1. а) Даны 5 карточек с буквами А, Б, О, З, Р. Найти вероятность того, что получится слово ОБРАЗ, если карточки выбираются наугад одна за другой и располагаются в ряд в порядке появления.

б) Совет директоров компании состоит из трех бухгалтеров, трех менеджеров и двух инженеров. Планируется создать подкомитет из его членов. Какова вероятность того, что все трое в этом подкомитете будут бухгалтеры?

2. Вероятность своевременного выполнения задания тремя независимо работающими бригадами соответственно равны 0,5; 0,6; 0,7. Найти вероятность своевременного выполнения задания хотя бы одной бригадой.

3. В магазин поступают одинаковые изделия с трёх заводов, причем первый завод поставил 50 изделий, второй – 30, третий – 20 . Известно, что доля брака на этих заводах равна соответственно 5%, 10% и 15% от всей выпускаемой продукции. Какова вероятность того, что купленное изделие окажется хорошего качества? Какова вероятность того, что купленное изделие хорошего качества изготовлено на третьем заводе?

4. а) Игральная кость бросается 5 раз. Найти вероятность того, что 2 раза выпадет шесть очков.

б) Среди семян ржи 0,04 % сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 5000 семян обнаружить 5 семян сорняков?

5. а) Обрыв произошел равновероятно на одном из 5 звеньев телефонной линии. Монтер обследует их последовательно до обнаружения обрыва. Случайная величина X – число обследованных звеньев.

1) Составить ряд распределения X .

2) Найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

3) Построить график функции распределения $F(x)$.

4) Найти вероятность $P(3 \le X \le 5)$.

б) Дана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ 2x-2, & 1 < x \le 2 \\ 0, & 2 < x \end{cases}.$$

Построить график плотности распределения $f(x)$ этой случайной величины. Что вероятнее: попадание случайной величины в интервал $(1{,}6;\, 1{,}8)$ или в интервал – $(1{,}9;\, 2{,}6)$?

Вариант 9.

1. а) В коробке находится 5 синих, 4 красных и 3 зеленых карандаша. Наугад одновременно вынимают 3 карандаша. Найти вероятность того, что все они красные.

б) В отделе внешних связей фирмы имеется восемь заказов на отправку товара: пять – внутри страны, а три – на экспорт. Какова вероятность того, что два выбранных наугад заказа окажутся предназначенными для потребления внутри страны?

2. Реклама растворимого кофе «Гранд» передается по каналам ТНТ, СТС, НТВ. Вероятность того, что потребитель увидит эту рекламу на канале ТНТ, равна 0,7; на СТС – 0,5 и на канале НТВ – – 1. Найти вероятность того, что потребитель увидит эту рекламу: а) по всем трем каналам; б) хотя бы по одному из этих каналов.

3. Диод, вставленный в микросхему, может принадлежать к одной из трёх партий с вероятностями 0,25, 0,5 и 0,25. Вероятности того, что диод проработает определённое число часов, для этих партий равны соответственно 0,1, 0,2, 0,4.

Определить вероятность того, что диод проработает заданное число часов.

4. а) В цехе имеются 4 резервных мотора. Для каждого мотора вероятность того, что он включен в данный момент, равна 0,1. Найти вероятность того, что в данный момент не включен ни один мотор. Какова вероятность, что включен хотя бы один мотор?

б) Найти вероятность того, что число выпадений на игральной кости числа 4 при 1000 бросаниях будет заключено между числами 161 и 171.

5. а) В программе экзамена 45 вопросов, из которых студент знает 30. В билете 3 вопроса. Случайная величина X – число вопросов билета, которые знает студент.

1) Составить ряд распределения X .

2) Найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

3) Построить график функции распределения $F(x)$.

4) Найти вероятность $P(0{,}5 \le X \le 3)$.

б) Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} e^x, & x \le 0, \\ 1, & 0 < x \end{cases}.$$

Найти плотность $f(x)$, вероятность $P(-1 \le X \le 1)$. Построить графики функций $F(x)$, $f(x)$.

Вариант 10.

1. а) Из 40 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент знает 30. Найти вероятность того, что студент не ответит на первый заданный вопрос.

   б) Три человека произвольно размещаются в 8 вагонах электрички. Найти вероятность того, что все они зайдут в вагон № 5.

2. Разрыв электрической цепи происходит в том случае, когда выходит из строя хотя бы один элемент из трех последовательно соединенных. Определить, что не будет разрыва цепи, если элементы выходят из строя соответственно с вероятностью 0.3; 0.4; 0.6.

3. Команда по биатлону составлена из двух отличных, трёх хороших и пяти средних стрелков. Вероятности попадания в мишень для каждой из этих групп соответственно равны 0,99, 0,9, 0,75. Какова вероятность, что наугад выбранный стрелок попадёт в мишень? Наугад выбранный стрелок попал в мишень. Какова вероятность, что это средний стрелок?

4. а) В семье 10 детей. Считая вероятности рождения мальчиков и девочек равными, найти вероятность того, что в семье 5 мальчиков и 5 девочек.

   б) Вероятность выпуска бракованного сверла (повышенной хрупкости) равна 0,02. Свёрла укладывают в коробки по 100 штук. Определить вероятность того, что число бракованных свёрл коробке не превосходит трёх.

5. а) Студенты Артемов и Белов стоят в очереди в раздевалку. Всего в очереди 6 человек. Случайная величина X – число студентов, стоящих между ними.

1) Составить ряд распределения X.

2) Найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

3) Построить график функции распределения $F(x)$.

4) Найти вероятность $P(3 \le X \le 5)$.

   б) Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 3^x, & x \le 0, \\ 1, & 0 < x \end{cases}.$$

Найти плотность $f(x)$, вероятность $P(-1 \le X \le 1)$. Построить график функции распределения $F(x)$, плотности $f(x)$.

Студент должен выполнить контрольные задания по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой его учебного номера (шифра).

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица 1. Значение функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Сотые доли x									
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3721	3605	3588	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3411	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1827	1804	1781	1759	1736
1,3	1714	1692	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1540	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1181	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0941	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
	Десятые доли x									
2,	0540	0440	0355	0283	0224	0175	0136	0104	0079	0060
3,	0044	0033	0024	0017	0012	0009	0006	0004	0030	0020

Таблица 2. Значение функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Сотые доли x									
0,0	0,0000	0040	0080	012	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0754
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2258	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
0,7	2580	2612	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2996	2023	3051	3079	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3553	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4979	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4430	4441
1,6	4452	4463	4474	4485	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4700	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4762	4767
	Десятые доли x									
2,	4773	4821	4861	4893	4918	4938	4953	4965	4974	4981
3,	4987	4990	4993	4995	4997	4998	4998	4999	4999	5000^8

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Н.С. Пискунов. – Т.2. - М.: Наука, 2008. – 551 с.

2. Высшая математика в управлениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова [и др.]. – Ч.2. - М.: ОНИКС, 2005 – 415 с.

3. Высшая математика. Часть 4 / Л.И. Терехина, И.И. Фикс. – Томск: Дельтаплан, 2003. – 264 с.

4. Бронштейн, И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1986. – 544 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ